



DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA

Introdução à Dinâmica Simbólica



Bolsista: Sofia Meneghel Silva
Orientador: Prof. Dr. Daniel Gonçalves
Universidade Federal de Santa Catarina

Março de 2022

- ▶ Informação é passada por meio de sequências de símbolos;
- ▶ Estudamos as propriedades de sequências desses símbolos.

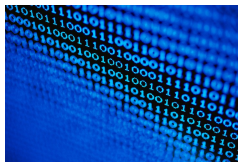


Figura: Números Binários



Figura: Alfabeto

A ●—	J ●—	S ●●●
B ●●●	K —●—	T —
C —●●	L —●●	U ●●—
D —●●	M —	V ●●—
E ●—	N ●—	W —●—
F ●●—	O —	X ●●—
G —●●	P —●—	Y —●—
H ●●●	Q —●—	Z —●●
I ●●	R —●—	

Figura: Código Morse

Definição 1.1.

*Se $\mathcal{A}$ é um alfabeto finito, então o conjunto de todas as sequências bi-infinitas de símbolos pertencentes a $\mathcal{A}$ é o **$\mathcal{A}$ -shift completo**, que é denotado por*

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid x_i \in A \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}\}$$

Definição 1.2.

*Uma sequência finita de símbolos pertencentes a um alfabeto $\mathcal{A}$ é chamada **bloco**. O bloco vazio é denotado por ε . O tamanho de um bloco u é o número de termos que este contém, denotado por $|u|$.*

Definição 1.3.

A **função shift** σ no $\mathcal{A}$ -shift completo relaciona cada ponto $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ ao ponto $y = \sigma(x) \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ de maneira que

$$y_i = \sigma(x)_i = x_{i+1}$$

$$\begin{array}{c} x = \dots x_{-3} x_{-2} x_{-1} \cdot x_0 x_1 x_2 x_3 \dots \\ \downarrow \sigma \\ y = \sigma(x) = \dots x_{-2} x_{-1} x_0 \cdot x_1 x_2 x_3 x_4 \dots \end{array}$$

Figura: Representação da função shift σ

Definição 1.4.

*Seja $\mathcal{F}$ um conjunto de blocos em $\mathcal{A}$, chamados de **blocos proibidos**. Defina $X_{\mathcal{F}}$ como sendo o subconjunto das sequências em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ que não contém nenhum bloco pertencente a $\mathcal{F}$.*

Definição 1.5.

Um **espaço shift** é um subconjunto $\mathcal{X}$ de um shift completo $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tal que $\mathcal{X} = X_{\mathcal{F}}$ para algum conjunto $\mathcal{F}$ de blocos proibidos.

Definição 1.6.

*Dizemos que um espaço shift $\mathcal{X}$ é **invariante** se $\sigma(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$.*

Proposição 1.7.

Sejam $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ conjuntos de blocos sobre um mesmo alfabeto $\mathcal{A}$. Então, $X_{\mathcal{F}_1} \cap X_{\mathcal{F}_2} = X_{\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2}$.

Proposição 1.8.

Seja $\mathcal{X}$ um espaço shift não completo e $N \geq 1$. Então existe um conjunto $\mathcal{F}$ de blocos de tamanho no mínimo N de maneira que $\mathcal{X} = X_{\mathcal{F}}$.

Definição 1.9.

Seja $\mathcal{X}$ um subconjunto de um shift completo, e denotemos por $\mathcal{B}_n(\mathcal{X})$ o conjunto de todos os blocos de tamanho n que ocorrem em algum ponto em $\mathcal{X}$. A **linguagem** de $\mathcal{X}$ é o conjunto

$$\mathcal{B}(\mathcal{X}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n(\mathcal{X})$$

Proposição 1.10.

1. *Seja $\mathcal{X}$ um espaço shift e $\mathcal{L} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$ a sua linguagem. Se $w \in \mathcal{L}$, então*
 - 1.1 *todo subbloco de w pertence a $\mathcal{L}$;*
 - 1.2 *existem blocos não vazios u e v em $\mathcal{L}$ tal que $uwv \in \mathcal{L}$.*
2. *Se $\mathcal{L}$ é uma coleção de blocos em $\mathcal{A}$, então $\mathcal{L} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$ para algum espaço shift $\mathcal{X}$ se, e somente se, $\mathcal{L}$ satisfaz as condições do item 1;*
3. *A linguagem de um espaço shift determina o espaço shift. De fato, é válido que $\mathcal{X} = X_{\mathcal{B}(\mathcal{X})^c}$. Então, dois espaços shift são iguais se, e somente se, estes tiverem a mesma linguagem.*

Definição 1.11.

Seja $\mathcal{X}$ um espaço shift sobre um alfabeto $\mathcal{A}$, e $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{[N]} = \mathcal{B}_N(\mathcal{X})$ o conjunto dos blocos de tamanho N que ocorrem em $\mathcal{X}$. Defina o **N -ésimo Higher Block code** $\beta_N : \mathcal{X} \rightarrow (\mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{[N]})^{\mathbb{Z}}$ por

$$(\beta_N(x))_{[i]} = x_{[i, i+N-1]}$$

$$\beta_N(x) = \dots \begin{bmatrix} x_{N-4} \\ x_{N-5} \\ \vdots \\ x_{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N-3} \\ x_{N-4} \\ \vdots \\ x_{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N-2} \\ x_{N-3} \\ \vdots \\ x_{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{N-1} \\ x_{N-2} \\ \vdots \\ x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_N \\ x_{N-1} \\ \vdots \\ x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N+1} \\ x_N \\ \vdots \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N+2} \\ x_{N+1} \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} \dots$$

Definição 1.12.

Seja $\mathcal{X}$ um espaço shift sobre um alfabeto $\mathcal{A}$, e $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{[N]} = \mathcal{B}_N(\mathcal{X})$ o conjunto dos blocos de tamanho N que ocorrem em $\mathcal{X}$. Defina o N -ésimo **higher power code** $\gamma_N : \mathcal{X} \rightarrow (\mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{[N]})^{\mathbb{Z}}$ por

$$(\gamma_N(x))_{[i]} = x_{[iN, iN+N-1]}$$

$$\gamma_N(x) = \dots \begin{bmatrix} x_{-2N-1} \\ x_{-2N-2} \\ \vdots \\ x_{-3N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{-N-1} \\ x_{-N-2} \\ \vdots \\ x_{-2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{-1} \\ x_{-2} \\ \vdots \\ x_{-N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{N-1} \\ x_{N-2} \\ \vdots \\ x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2N-1} \\ x_{2N-2} \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{3N-1} \\ x_{3N-2} \\ \vdots \\ x_{2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{4N-1} \\ x_{4N-2} \\ \vdots \\ x_{3N} \end{bmatrix} \dots$$

Proposição 1.13.

Os higher block shifts de um espaço shift são também espaços shift.

Proposição 1.14.

Os higher power shifts de um espaço shift são também espaços shift.

Definição 1.15.

Seja $\mathcal{X}$ um espaço shift sobre um alfabeto $\mathcal{A}$ e m e n inteiros fixos tais que $-m \leq n$. Então defina o $(m + n + 1)$ -**block map** fixo $\Phi : \mathcal{B}_{m+n+1}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathfrak{A}$ por

$$y_i = \Phi(x_{i-m}x_{i-m+1} \dots x_{i+n}) = \Phi(x_{[i-m, i+n]})$$

Definição 1.16.

Seja $\mathcal{X}$ um espaço shift sobre $\mathcal{A}$, e $\Phi : \mathcal{B}_{m+n+1}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{A}$ um block map. Então a função $\phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ definida por $y = \phi(x)$ com y_i definido anteriormente é chamada de **sliding block code** com **memória m** e **antecipação n** induzida por Φ .

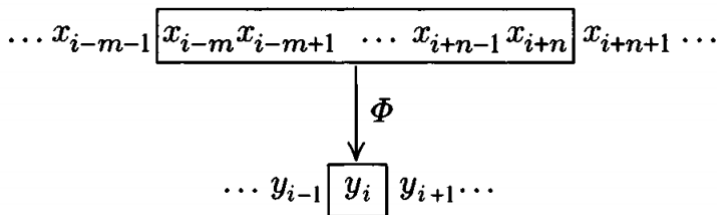


Figura: Sliding block code

Exemplo 1.17.

Seja $\mathcal{X}$ um espaço shift sobre um alfabeto $\mathcal{A}$, $\mathfrak{A} = \mathcal{A}$, $m = 0$, $n = 1$, e $\Phi(a_0a_1) = a_1$. Assim $\phi = \Phi_\infty^{[0,1]}$ é tal que para todo ponto $x \in \mathcal{X}$

$$\begin{aligned}x &= \dots x_{-3}x_{-2}x_{-1}.x_0x_1x_2\dots \\ \phi(x) &= \dots x_{-3}x_{-2}x_{-1}x_0.x_1x_2\dots\end{aligned}$$

Nesse caso, ϕ descola cada termo do ponto x um posição para a esquerda, portanto $\phi = \sigma$, a função shift.

Exemplo 1.18.

Seja $\mathcal{X}$ um espaço shift sobre um alfabeto $\mathcal{A}$, $\mathfrak{A} = \mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{[N]}$, $m = 0$, $n = N - 1$, $Y = \mathcal{X}^{[N]}$ e

$$\Phi(a_0 a_1 \dots a_{N-1}) = a_0 a_1 \dots a_{N-1} \in \mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{[N]}$$

Assim $\phi = \Phi_{\infty}^{[0, N-1]}$ é tal que para todo ponto $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{X}$

$$\phi(x) = \dots \begin{bmatrix} x_{N-4} \\ x_{N-5} \\ \vdots \\ x_{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N-3} \\ x_{N-4} \\ \vdots \\ x_{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N-2} \\ x_{N-3} \\ \vdots \\ x_{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{N-1} \\ x_{N-2} \\ \vdots \\ x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_N \\ x_{N-1} \\ \vdots \\ x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N+1} \\ x_N \\ \vdots \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N+2} \\ x_{N+1} \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} \dots$$

Perceba que, nesse caso, $\phi = \beta_N$, onde β_N é o N th higher block code.

Teorema 1.19.

A imagem de um espaço shift sob um sliding block code é um espaço shift.

Teorema 1.20.

Um sliding block code que é sobrejetivo e injetivo é também inversível.

Definição 1.21.

Seja $M = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ para algum alfabeto $\mathcal{A}$ e defina

$$\rho_S(x, y) = \begin{cases} 2^{-k}, & \text{se } x \neq y, \text{ e } k \text{ é o maior inteiro tal que } x_{[-k, k]} = y_{[-k, k]} \\ 0, & \text{se } x = y \end{cases}$$

Definição 1.22.

*Um espaço métrico (M, ρ) é dito **compacto** se toda sequência em M tem uma subsequência convergente para um ponto em M .*

Proposição 1.23

Todo espaço shift é compacto.

Teorema 1.24.

Um subconjunto de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é um espaço shift se, e somente se, é shift invariante e compacto.

Obrigada pela atenção! Estou aberta a questionamentos e comentários.