LAPLACIANO EM GEOMETRIA.

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

↳ $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$\nabla^2 f$

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\nabla^2 f = \operatorname{div} \nabla f$

$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

GEOMETRIA (RIEMANNIANA)

↳ MANIFOLD COM GEO. RIEMANN.

$\boxed{\text{PARAMETRIZAÇÕES}}$ → GEO DIF

$\boxed{\text{1-1, BIJETIVA, COM DIFEOMORFISMO}}$ → GEO DIFER.

↳ MÉT. RIEMANN.

$\Delta : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ ⇝ TEOR. LINEAR

$\Delta(\alpha f + g) = \alpha \Delta f + \Delta g$.

Q: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $f \neq 0$; $\Delta f = \lambda f$??

R: SIM. $\exists\ \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m \leq \to \infty$.

↳ ELÍPTICO, OUTO ADJUNTO

ANALÍTICO MATEMÁTICO

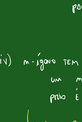
Q: COMO ENCONTRAR $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \ldots$

↳ DIFÍCIL: 1 MOTIVO dim $C^\infty(\Omega) = \infty$.

AUTOVALORES X GEOMETRIA.

- MARK KAC: CAN YOU HEAR THE SHAPE OF A DRUM??

↳ VOCÊ PODE OUVIR A FORMA DE UM TAMBOR?



$\Delta : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$.

λ_k → VARIÁVEIS FUNDAMENTAIS DE Ω.

↳ VEM DO FÍSICO.

---

i) Rayleigh (1890S) ↗ FIXO PERÍMETRO.

R = retângulo, Q = quadrado

$\Rightarrow \text{AREA}(R)\,\lambda_1(R) \geq \text{AREA}(Q)\,\lambda_1(Q)$.

A IGUALDADE VALE $\Leftrightarrow R = Q$.

ii) Faber-Krahan (1925):

$\underset{\Omega \subset \mathbb{R}^n}{\text{vol}(\Omega)^{2/n}} \lambda_1(\Omega) \geq \underset{B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}}{\text{vol}(B)^{2/n}} \lambda_1(B)$

dimensão dimensão

($\Leftrightarrow$ VALE IGUALDADE $\Leftrightarrow \Omega = B$.

iii) Polya-Szegö (1951) VALE

$\lambda_1(P) \geq \lambda_1(R)$

3-ágono ⇝ TRIÂNGULO ou QUALQUER

4-ágono ⇝ QUADRILÁTERO

TRIÂNGULO EQ.

QUADRADO.

→ O PROBLEMA DE SE ISSO VALE PARA m-ágonos com $m > 4$

NÃO SE SABE...

iv) m-ágono TEM OS MENORES AUTOVALORES DE UM m-ágono REGULAR. EXISTE ELE PRÓ PRIO É REGULAR.

↳ Lu e Rowlett (2015).

KAC 1966:

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \sim \frac{1}{4\pi t}\left(\text{AREA}(\Omega) + \sqrt{\text{AREA}}\,\text{Comp}(\partial\Omega) + \frac{2\pi}{3}(1 - g(\Omega))\right)$

TOPOLOGIA DE Ω

$g(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}) = 1$.

GEOMETRIA ESPECTRAL. (PROBLEMA ISOESPECTRAL)

M VARIEDADE RIEMANN.

↳ $\Lambda^k M$ ⇝ FORMAS DIFERENCIAIS

↳ $\omega : M \to \{\text{FORMAS ALT EM } TM\}$

$\omega = \sum f_I \, dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_k}$

$\Lambda^0 M = C^\infty(M)$

$d_k : \Lambda^k M \to \Lambda^{k+1} M$

$\mathbb{R}^3$, $M = \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$

$d_0 = \nabla \quad d_2 = \operatorname{div}$

$d_1 = \text{rot}$

SE É RIEMANN.

$d_k^* : \Lambda^{k+1} M \to \Lambda^k M$

↳ $\boxed{\pm\Delta = d_k^* d_k + d_k d_k^*}$

↳ ELÍPTICO, OUTO ADJ.

$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m \leq \cdots \to \infty$

$M = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P$.

$A \in SO(3)$

$\det A = 1$

$A^{-1} = A^T$.

$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

↳ $B^{-1} A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$B^{-1} A \in SO(2)$.

$\boxed{S^2 = SO(3) / SO(2)}$

1) $\Delta \circ R = R \circ \Delta \qquad R \in SO(3)$

↳ Δ é um hom. de rep.

$SO(3) \curvearrowright S^2 \Rightarrow SO(3) \curvearrowright \Lambda^k S^2$

↳ VISTO COMO REP.

$\Rightarrow so(3) \curvearrowright \Lambda^k S^2$

↳ alg. Lie. REP

↳ Rep. SÃO MUITO BEM EST.

↳ PARAM. POR $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$.

↳ $\underset{so(3)}{\Delta} \circ \underset{so(3)}{R} = R \circ \Delta \rightsquigarrow a\Delta = \Delta a$

⇝ AUTO VALORES SÃO REGIDO POR (k_1, k_2).