DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA

Frações contínuas: Propriedades e aplicações

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Bolsista: Renan Rabelo Goularti
Orientador: Prof. Dr. Daniel Gonçalves
Universidade Federal de Santa Catarina

Definição (Fração contínua)

Uma fração contínua é uma expressão dada por:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

Onde $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_i \in \mathbb{Z}_+$ para todo $i \geq 1$. Se existir um último termo ela é dita **finita**, caso o contrário é **infinita**.

Definição (Fração contínua periódica)

Quando uma fração contínua é infinita e a partir de um certo ponto seus termos se repetem ciclicamente, ela é denominada **periódica**. Caso o contrário ela é chamada de **aperiódica**.

Notação (Fração contínua)

Para uma fração contínua qualquer utilizamos a seguinte notação:

$$x = [a_0 \mid a_1, a_2, a_3, \ldots]$$

Se ela for periódica, podemos indicar o bloco de termos que se repete com uma barra superior:

$$x = [a_0 \mid a_1, a_2, a_3, \ldots, \overline{a_N, \ldots, a_{N+k}}]$$

Frações contínuas

Convergentes

Propriedades

Exemplos

Definição (Convergente)

Seja x uma fração contínua dada por:

$$x = [a_0 \mid a_1, a_2, a_3, \ldots]$$

A enésima convergente de x é uma fração contínua na forma:

$$x_n = [a_0 \mid a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

Ou seja, é a fração contínua até aquele ponto. Exemplo:

$$x_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}$$

É conveniente utilizarmos a notação $\frac{p_n}{q_n}$ para referirmos a enésima convergente da fração contínua em questão, já que o numerador e denominador das convergentes de uma fração contínua respeitam a seguinte relação:

$$\begin{aligned} p_n &= a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2} & p_0 &= a_0 & p_1 &= a_0 \cdot a_1 + 1 \\ q_n &= a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2} & q_0 &= 1 & q_1 &= a_1 \end{aligned}$$

Frações contínuas

Convergentes

Propriedades

Exemplos

- Todo número Real tem expansão em fração contínua;
- Racionais tem expansão finita;
- Raízes irracionais de um polinômio quadrático com coeficientes inteiros tem expansão infinita periódica;
- Os demais Irracionais tem expansão aperiódica;

- Toda convergente par é maior que as convergentes pares anteriores e toda convergente ímpar é menor que as convergentes ímpares anteriores;
- Toda convergente par é menor que toda convergente ímpar;
- No infinito elas convergem para o número Real que está sendo representado;
- São as melhores aproximações racionais do número representado;
- Podem ser utilizadas para resolver equações diofantinas, como por exemplo a equação de Pell.

Frações contínuas

Convergentes

Propriedades

Exemplos

Representação de $\frac{10}{7}$:

$$\begin{aligned}\frac{10}{7} &= \frac{7+3}{7} = 1 + \frac{3}{7} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}} = 1 + \frac{1}{\frac{3\cdot 2+1}{3}} \\ &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}} = [1 \mid 2, 3]\end{aligned}$$

Exemplos de Irracionais:

$$\sqrt{2} = [1, \mid \overline{2}] \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1, \mid \overline{1}]$$

$$\pi = [3 \mid 7, 15, 1, \ldots] \qquad e = [2 \mid 1, 2, 1, 1, \ldots]$$

Sabemos que $\pi = [3 \mid 7, 15, 1, \ldots]$, podemos então calcular algumas convergentes:

$\frac{p_0}{q_0} = 3$	Uma aproximação razoável de π
$\frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7}$	Aproxima melhor que $3,14$
$\frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106}$	Aproxima melhor que $3,1415$
$\ldots$	$\ldots$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Frações contínuas: Propriedades e aplicações

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA